Ecuaciones Diferenciales:

Problemas de Valor de Frontera (PVF)

Problemas en Dos Dimensiones

Existen muchos problemas físicos reales que involucran varias dimensiones espaciales y la temporal. Unos de los más comunes son los de Fenómenos de Transporte en Estado Estacionario:

Ejemplos:

- Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

- Ecuación de Energía (Sin Reacción):

$$\rho C_p\left(u\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=f(u,v)$$

- Ecuación de Transferencia de Masa:

$$u\frac{\partial C_A}{\partial x}+v\frac{\partial C_A}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\cdot\frac{\partial C_A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)+\dot{N}_A$$

Uno de los Problemas más sencillos que se pueden plantear es con la Ecuación de Energía, la conducción de calor en una placa plana en estado estacionario, la ecuación se reduce a:

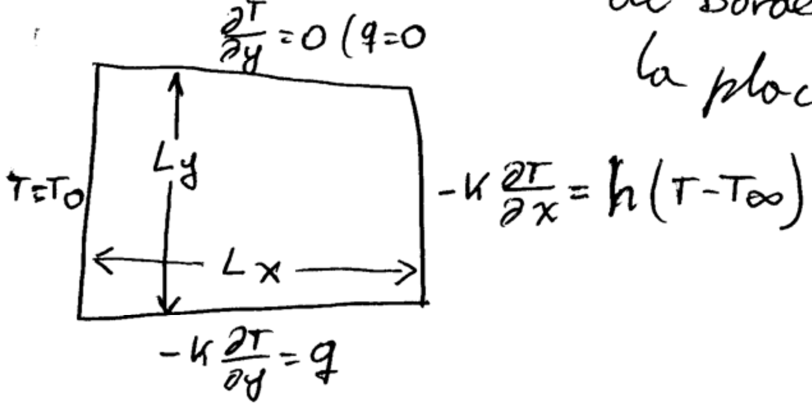
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0$$

K: conductividad Térmica
en principio $K=K(T)$.

Si suponemos $K=$ ctte, el problema se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

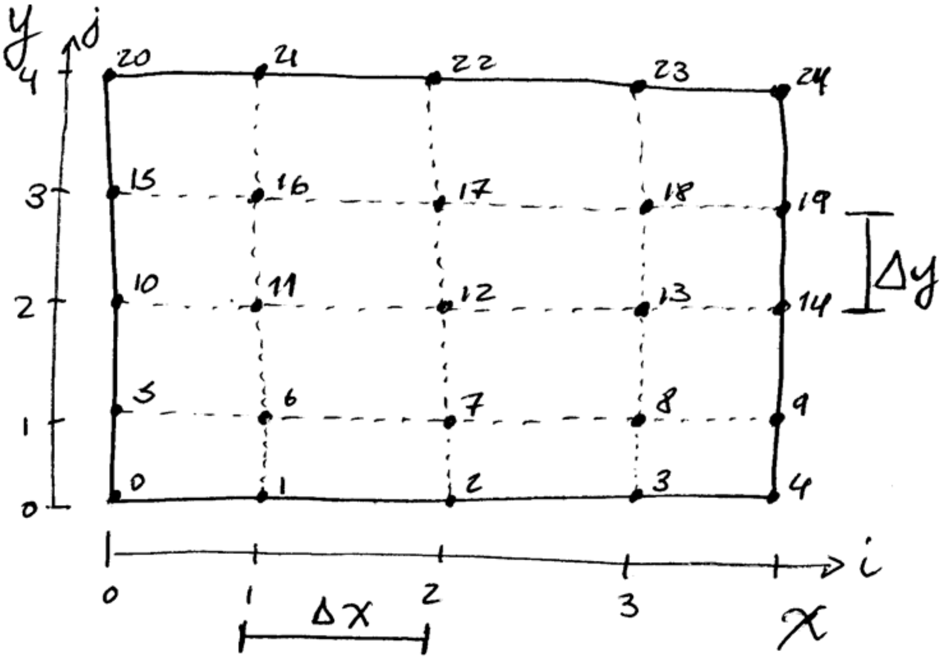
; Ahora se tendrán 4 condiciones de Borde, una por cada lado de la placa. Todos pueden ser Diferentes



De la misma forma que ocurre en 1D, la ED es solo válida en la Región Interna, los Bordes tienen ya sus condiciones especificadas.

A continuación se debe discretizar la placa, pero como tiene dos dimensiones, se obtendrá una matriz de Nodos dentro de la placa.

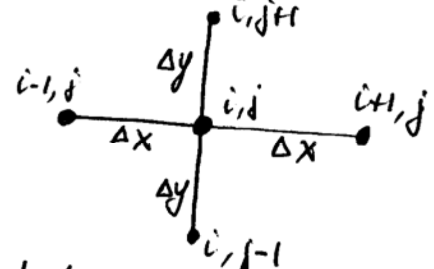
La Discretización se puede hacer con una cantidad igual o diferente de divisiones en cada eje:



$K = i + N_x \cdot j$

N_x: Nodos Eje X

N_y: Nodos Eje Y



Nodo Interno Genérico (i,j)

Ahora, para un Nodo Interno cualquiera se cumple la ED: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. hay Derivadas en ambos ejes.

Lo que se hace es reemplazar cada derivada por su expresión respectiva de Diferencias Finitas en cada eje, es decir; para el nodo (i,j).

$$\underbrace{\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2}}_{\text{Nodos a la Izquierda y a la Derecha}} + \underbrace{\frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2}}_{\text{Nodos Arriba y Abajo}} = 0$$

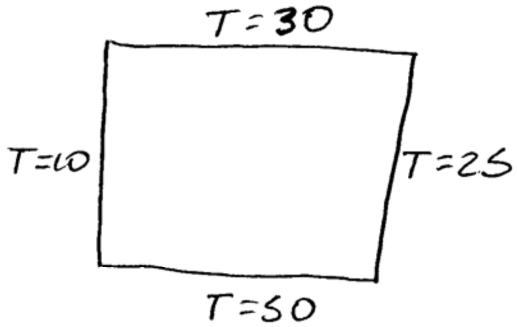
Ahora se reagrupa todo para obtener la Ecuación final del nodo interno (i,j):

$$\frac{1}{\Delta y^2} T_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta x^2} T_{i-1,j} - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) T_{i,j} + \frac{1}{\Delta x^2} T_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} T_{i,j+1} = 0$$

Al ordenarla así, la matriz resultante de los nodos tendrá forma de Bandas Diagonales lo que es muy útil para poder resolverla mediante métodos Iterativos (Gauss-Seidel, Relajación).

Ahora queda Determinar las Ecuaciones de cada uno de los cuatro Bordes:

Empezaremos con el Ejemplo más sencillo, con valores constantes en los cuatro lados:



Placa cuadrada
5 Nodos en cada Eje

Vamos a usar el mismo mallado de la pág. 3.

Este es el caso es el más sencillo porque simplemente hay que asignar el valor de T al nodo respectivo de cada Borde.

5

Adicionalmente, debido a que la placa es cuadrada, $Lx = Ly$, y que se va a usar la misma cantidad de nodos en cada eje, ocurre que al calcular queda $\boxed{\Delta x = \Delta y}$,

lo que va simplificar muchísimo la ecuación derivada para el nodo interno (i,j), quedando así:

$$T_{i,j-1} + T_{i-1,j} - 4 \cdot T_{ij} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1} = 0$$

Esta Ecuación es valida para los nodos:
6, 7, 8; 11, 12, 13; 16, 17, 18. Los demás son Bordes.

Condiciones de Borde:

Lado Inferior: $T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 50$
Esto es una ecuación para cada Nodo.

Lado Izquierdo: $T_5 = T_{10} = T_{15} = T_{20} = 10$.

OjO: ya se asignó $T_0 = 50$, para el caso particular de las esquinas, se escoge cualquiera de las condiciones de los lados adyacentes.

Lado Superior: $T_{21} = T_{22} = T_{23} = T_{24} = 30$

Mismo detalle de la Esquina (T_{20}).

Lado Derecho: $T_9 = T_{14} = T_{19} = 25$.

Finalmente se arma el sistema matricial que será de 25×25, y 25 es el número total de nodos.

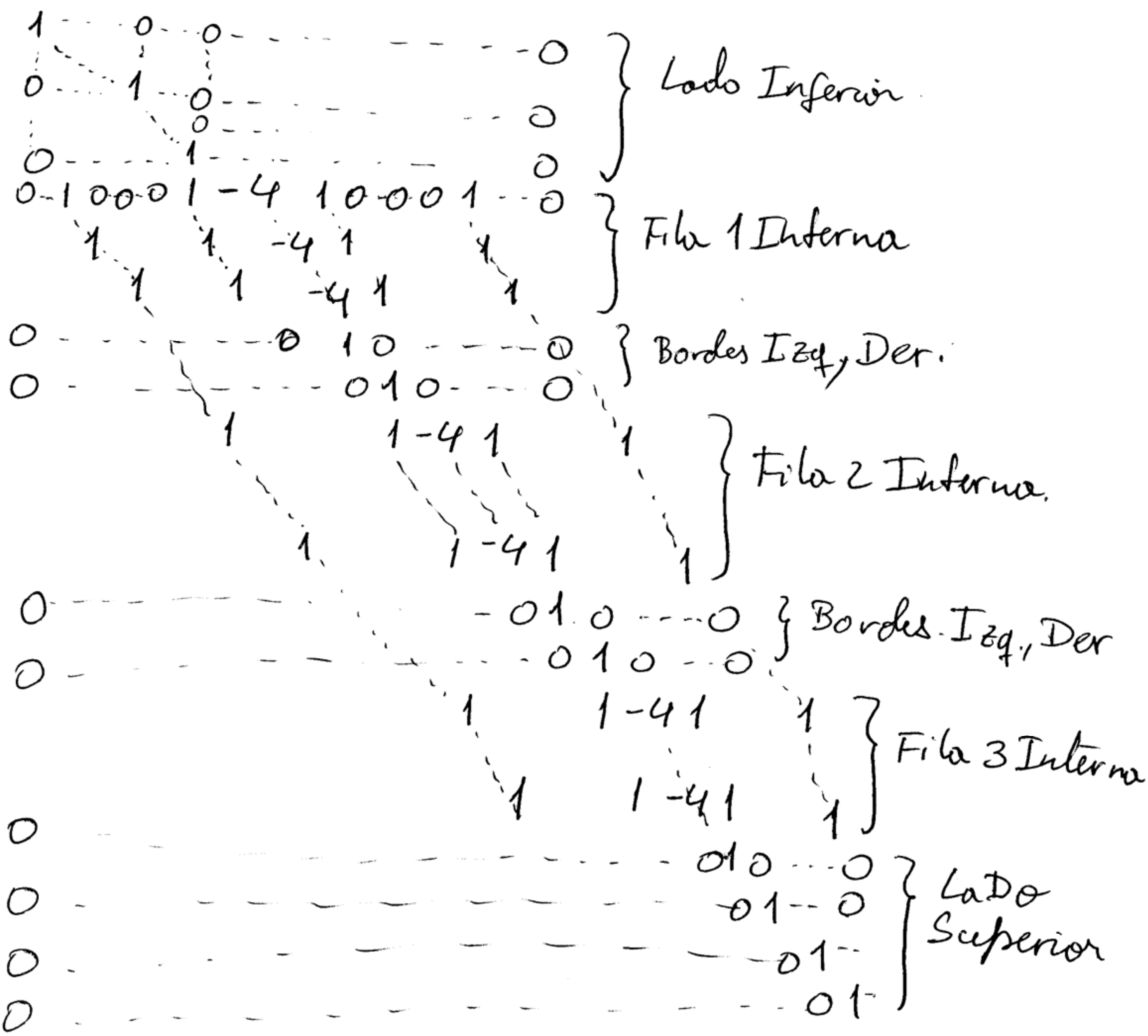
<u>Nota</u>: Este es el Tamaño más pequeño para este tipo de Problemas.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ \vdots \\ T_{24}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 10 \\ 0 \\ \vdots \\ 30
\end{bmatrix}
$$

La matriz es grande, pero tiene una Estructura Regular. La zona Encerrada corresponde a los nodos Internos 6, 7, 8.

Dichos nodos presentan en la matriz la forma de Bandas, en cambio, los Bordes, debido a esta condición de Valor constante en particular, forman una Diagonal de 1's exclusivamente.

La matriz se ve así:



Resolviendo el Sistema:
los Temperaturas de la Placa son:

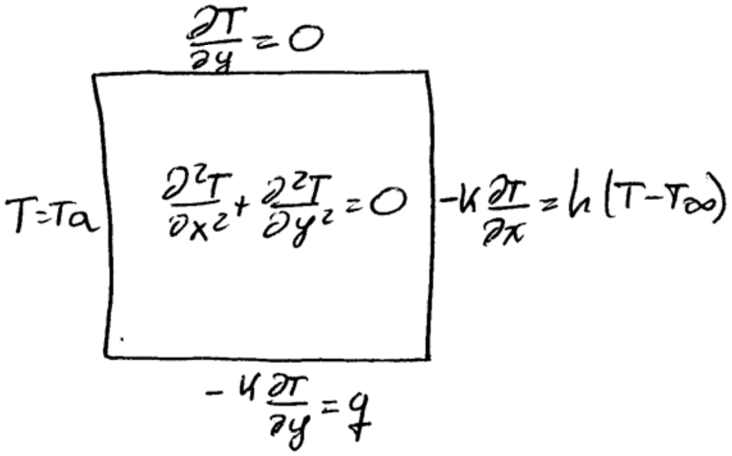
10	30	30	30	30
10	22,5	27,27	27,86	25
10	22,72	28,75	29,15	25
10	29,64	35,85	35	25
50	50	50	50	50

Obviamente, los Resultados van acambiar dependiendo de los condiciones de Borde seleccionados para las esquinas.

También, mientras más nodos se usen, más exactos serán los resultados, pero el sistema va a ser más pesado de resolver.

A continuación veremos oto ejemplo, será la misma placa cuadrada, pero con condiciones de borde diferentes:

Ejemplo: Placa con Diversas Condiciones de Borde:



con: $k = 5$; $q = 100$;
$h = 50$; $T_\infty = 20$
$T_a = 50$.
5 Nodos en cada Eje.

El mallado a utilizar es el mismo (pág. 3)

Para los Nodos Internos, que cumplen con la ED:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{ij} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{ij} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Debido al mallado ocurre que $\Delta x = \Delta y$, por lo tanto se simplifica la Ecuación:

$$T_{i,j-1} + T_{i-1,j} - 4T_{ij} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1} = 0$$

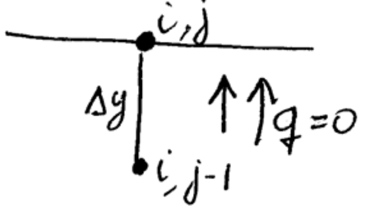
Condiciones de Borde:
Lado Izquierdo: Valor Constante:

$$T_0 = T_5 = T_{10} = T_{15} = T_{20} = T_a = 50$$

Es una Ecuación para cada uno de esos 5 nodos.

Los restantes condiciones llevan tratamiento especial por Tratarse de Derivadas.

Lado Superior: $\dfrac{\partial T}{\partial y}=0$



Esta condición Indica que este lado está aislado ($q=0$), es decir, No hay flujo de calor en dirección Vertical en ese Borde.

Como estamos del lado de arriba, se debe sustituir la Derivada por una expresión de Diferencias Finitas Hacia Atrás, por simplicidad, escogemos la de Un Punto Atrás, pero para mejorar la exactitud, se debe usar la fórmula de Dos puntos Atrás.

Evaluando para el nodo (i,j) en el Borde Superior:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{ij}=0 \Rightarrow \frac{T_{ij}-T_{i,j-1}}{\Delta y}=0 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\Delta y}T_{i,j-1}+\frac{1}{\Delta y}T_{ij}=0}$$

Esta es la forma general, pero se puede simplificar a:

$$\boxed{-T_{i,j-1}+T_{i,j}=0}$$ Borde Superior.

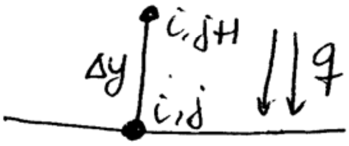
Para los Nodos del Mallado queda así:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Nodo 21: } -T_{16}+T_{21}=0\\
&\text{Nodo 22: } -T_{17}+T_{22}=0\\
&\text{Nodo 23: } -T_{18}+T_{23}=0\\
&\text{Nodo 24: } -T_{19}+T_{24}=0
\end{aligned}\right|$$

Estas son las Ecuaciones finales que van a la matriz.

Lado Inferior: $-K\frac{\partial T}{\partial y} = q$ (Derivada Constante).

Esta condición es del mismo estilo de la anterior, aquí se tiene un flujo de calor constante en dirección Vertical.



Como ahora estamos del lado de abajo, debemos usar una expresión de Diferencias Finitas Hacia Delante.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{-q}{K} \Rightarrow \frac{T_{i,j+1} - T_{ij}}{\Delta y} = -\frac{q}{K} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\Delta y}T_{ij} + \frac{1}{\Delta y}T_{i,j+1} = -\frac{q}{K}}$$

También se puede reacomodar $\boxed{T_{ij} + T_{i,j+1} = \frac{-q \cdot \Delta y}{K}}$

Para el mallado usado, los ecuaciones serían:

Nodo 1: $-T_1 + T_6 = \frac{-q\Delta y}{K}$

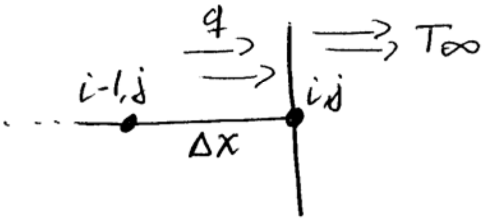
Nodo 2: $-T_2 + T_7 = \frac{-q \cdot \Delta y}{K}$

Nodo 3: $-T_3 + T_8 = \frac{-q \cdot \Delta y}{K}$

Nodo 4: $-T_4 + T_9 = \frac{-q \cdot \Delta y}{K}$

Estas son los Ecuaciones Finales para la Matriz.

Lado Derecho: $-K\frac{\partial T}{\partial x} = h \cdot (T - T_\infty)$ (Derivada como función de T)



Aquí debemos usar una Expresión hacia atrás de Diferencias Finitas en el eje horizontal.

Evaluando:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{-h}{K}\left(\overset{\text{ojo}}{T_{ij}} - T_\infty\right) \Rightarrow \frac{T_{ij} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{-h}{K}\left(T_{ij} - T_\infty\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\Delta x}T_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{h}{K}\right)T_{ij} = \frac{h}{K}\cdot T_\infty}$$

Para los Nodos del mallado quedaría:

Nodo 9: $-\frac{1}{\Delta x}T_8 + \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{h}{K}\right)T_9 = \frac{h \cdot T_\infty}{K}$

Nodo 14: $-\frac{1}{\Delta x}T_{13} + \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{h}{K}\right)T_{14} = \frac{h \cdot T_\infty}{K}$

Nodo 19: $-\frac{1}{\Delta x}T_{18} + \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{h}{K}\right)T_{19} = \frac{h \cdot T_\infty}{K}$

Ecuaciones Finales.

Ahora solo queda armar la matriz y Resolver:
Las temperaturas resultantes son:

50	44,68	38,56	31,36	23,24	Noten aquí que son las filas iguales por la condición $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$.
50	44,68	38,56	31,36	23,24	
50	45,47	39,64	32,26	23,50	
50	47,57	42,26	34,56	24,16	
50	52,58	47,26	39,56	25,59	

FIN.